Le PRODUIT VECTORIEL

I) ORIENTATION DE L'ESPACE

1)Le bonhomme d'Ampère

L'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé et $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ la base qui lui est associée.

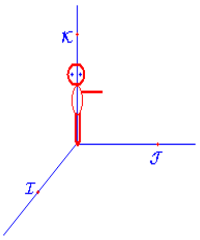
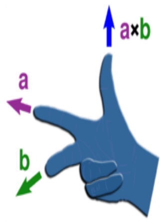
On pose un observateur (imaginaire) sur l'axe $[Oz)$ et il regarde vers l'axe $[ox)$; On aura deux positions pour l'axe $[Oy)$:

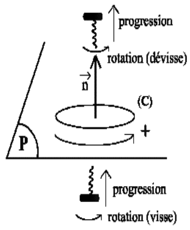
1er cas : $[Oy)$ est à la droite de l'observateur

On dit que la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est **indirecte** de même pour le Repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

2eme cas : $[Oy)$ est à la gauche de l'observateur

On dit que la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est **directe** de même pour le Repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$



2) Remarques

1)Soit B$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base **directe.**

Les bases : $\left(\vec{i};\vec{k};\vec{j}\right)$; $\left(\left(\vec{k};\vec{j};\vec{i}\right)\right.$; $\left(\vec{j};\vec{i};\vec{k}\right)$ obtenues par la permutation de deux vecteurs sont des bases indirectes.

2)Les bases $\left(-\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; $\left(\vec{i};-\vec{j};\vec{k}\right)$; $\left(\vec{i};\vec{j};-\vec{k}\right)$ sont des base indirectes

3)les bases : $\left(\vec{j};\vec{k};\vec{i}\right)$;$\left(\vec{k};\vec{i};\vec{j}\right)$ obtenues par une rotation circulaire, sont des bases directes.

4)Soit B$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base **directe,** B'$\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ une autre base de $\mathcal{V}3$; la base B' est directe si et seulement si $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)\succ 0$

II) DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}3$.

1)On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
Soit A un point dans l'espace ; ils existent deux points dans l'espace C et D tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$,les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un plan (P) dans l'espace $(\mathcal{E})$.

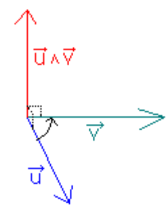
Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ tel que : $(AD)\perp(P)$

La base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$ est directe.

$AD=AB\times AC\times \sin\alpha$ où α la mesure de l'angle $\left(\widehat{BAC}\right)$

Le vecteur $\vec{w}$ est indépendant du choix des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ; on pose que leur produit vectoriel est $\vec{0}$



On note $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$

Exemple : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\left\|\vec{u}\right\|=1$ et $\left\|\vec{v}\right\|=3$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{3}$

Calculer : $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$

$$\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\sin\theta=1\cdot 3\sin\frac{\pi}{3}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

III) PROPRIETES DU PRODUIT VECTORIEL

1) Propriétés :

1)$\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$

2)Le produit vectoriel est antisymétrique **:**

$\vec{v}\wedge\vec{u}=-\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$

3)Le produit vectoriel est bilinéaire :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$

$\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$

$\left(\lambda\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\left(\lambda\vec{v}\right)$

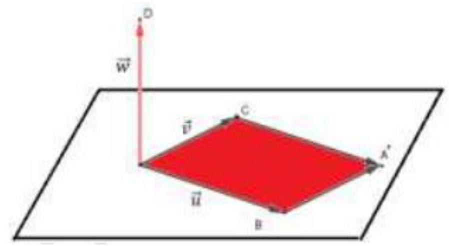
2) Interprétation géométrique : Surface d'un triangle.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}3$, qu'on suppose non colinéaires

tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}=\vec{u}\wedge\vec{v}$

on a d'après la

Définition du produit vectoriel : $AD = AB\times AC\times \sin\alpha$ où α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$



D'autre part, la surface du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

et on a : $\sin\alpha = \frac{BH}{AB}$ donc : $BH = AB\sin\alpha$ et par suite :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin\alpha$$

et donc $AD = 2S_{ABC} = S_{ABCD}$

Propriété 1: Soient A, B et C trois points non alignés on a $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$: est la surface du parallélogramme $ABA'C$

Propriété 2 :

Soient A, B et C trois point non alignés, la surface du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

IV) L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soit $\mathrm{B}\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathcal{V}3$,

Considérons deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\overrightarrow{u'}\left(x';y';z'\right)$ dans l'espace vectoriel V_3 on a donc : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\overrightarrow{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ par suite :

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)$$

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = xx'\left(\vec{i} \wedge \vec{i}\right) + xy'\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) + xz'\left(\vec{i} \wedge \vec{k}\right) +$$

$$+yx'\left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right) + yy'\left(\vec{j} \wedge \vec{j}\right) + yz'\left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) +$$

$$+zx'\left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) + zy'\left(\vec{k} \wedge \vec{j}\right) + zz'\left(\vec{k} \wedge \vec{k}\right)$$

On a : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ et $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = xx'\vec{0} + xy'\vec{k} - xz'\vec{j} +$$

$$-yx'\vec{k} + yy'\vec{0} + yz'\vec{i} + +zx'\vec{j} - zy'\vec{i} + zz'\vec{0}$$

D'où :

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \left(yz' - zy'\right)\vec{i} - \left(xz' - zx'\right)\vec{j} + \left(xy' - yx'\right)\vec{k}$$

Propriété : Soient $\mathrm{B}\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathcal{V}3$, et deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\overrightarrow{u'}\left(x';y';z'\right)$ on a :

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ \cancel{z} & \cancel{z'} \end{vmatrix}\vec{k}$$

Exemple1 : $\vec{u}\left(1;1;1\right)$ et $\vec{v}\left(2;1;2\right)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

Exemple2 : $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

V) APPLICATIONS.

1) Alignement de 3 points.

Propriété : Soient A, B et C trois point dans l'espace, A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ce qui est équivalent à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

2) Equation d'un plan.

Soient A, B et C trois point dans l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal sur (ABC) donc :

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

Cette équivalence détermine l'équation cartésienne du plan (ABC)

Exemple : dans l'espace muni d'un repère orthonormée directe $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ on considère les points $A\left(0;1;2\right)$ et $B\left(1;1;0\right)$ et $C\left(1;0;1\right)$

1)Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points A et B et C sont non alignés

2)Calculer la surface du triangle ABC

3)Déterminer une équation cartésienne du plan $\left(ABC\right)$

Solution :1) $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)$

$\overrightarrow{AB}\left(1;0;-2\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(1;-1;-1\right)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

Donc : $S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$ax + by + cz + d = 0$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ donc $a = -2$ et $b = -1$ et $c = -1$

Donc : $-2x - 1y - 1z + d = 0$ (ABC)

Et on a : $A(0;1;2) \in (P)$ donc : $0 - 1 - 2 + d = 0$

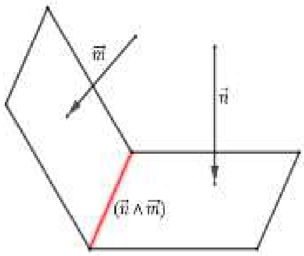
donc $d = 3$

Donc (ABC) : $-2x - 1y - 1z + 3 = 0$

Donc (ABC) : $2x + y + z - 3 = 0$

3) Intersection de deux plans

Soient (P) et (Q) deux plan sécants dans l'espace suivant une droite (Δ), Soient $\vec{n}$ un vecteur normal sur (P) et $\vec{m}$ un vecteur normal sur (Q)



Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ) alors : $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et $\vec{m}.\vec{u} = 0$ et on sait que :

$\vec{m}.(\vec{n} \wedge \vec{m}) = \vec{n}.(\vec{n} \wedge \vec{m}) = 0$ on en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{n} \wedge \vec{m}$ sont colinéaires et par suite $\vec{n} \wedge \vec{m}$ est un vecteur directeur de (Δ)

Propriété : Soient (P) et (Q) deux plan dans l'espace où $\vec{n}$ est un vecteur normal sur (P) et $\vec{m}$ est un vecteur normal sur (Q), si $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont non colinéaires alors (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{m}$

Exemple : L'espace est muni d'un repère orthonormé

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

(P) $x - y + 2z + 1 = 0$ et (P') $2x + y - z + 2 = 0$

Solution : $\vec{n}(1;-1;2)$ et $\vec{n'}(2;1;-1)$ deux vecteurs normaux respectivement de (P) et $(P)'$

On a : $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

Donc : $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \neq \vec{0}$

les plans (P) et $(P)'$ sont sécants suivant une droite (D)

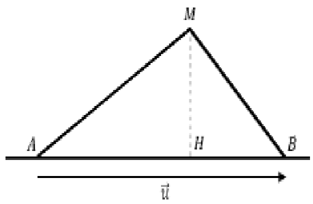
et $\vec{u}(-1;5;3)$ est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par $A(-1;5;3)$ (il suffit de donner par exemple $z = 0$ et résoudre le système et calculer x et y)

Donc : une représentation paramétrique de (D) est $(D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Soit $D(A;\vec{u})$: la droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point dans l'espace.



- Si $M \in (D)$ alors $d(A;(D)) = 0$
- Si $M \notin (D)$ on pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Soit H la projection orthogonale de M sur la droite (D). on a :

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2} MH \times AB =$

On en déduit que : $d(M;(D)) = MH = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{AB}$

Propriété : Soient $D(A;\vec{u})$: une droite dans l'espace et M un point ; la distance du point M à la droite (D) est/ $d(M;(D)) = MH = \frac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

(Cette propriété reste vraie si $M \in (D)$)

Exemple : L'espace est muni d'un repère orthonormé

calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une représentation paramétrique est : $(D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Solution : la droite (D) passe par : $A(1;-1;0)$ et $\vec{u}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur de (D)

et $\overrightarrow{AM}(-2;1;1)$

$\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2&2\\1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2&2\\1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+6\vec{j}$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$ et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{4+1+4}=3$

Donc : $d\left(M;(D)\right)=\dfrac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

Exercice : soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe$\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a)Montrer que $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$

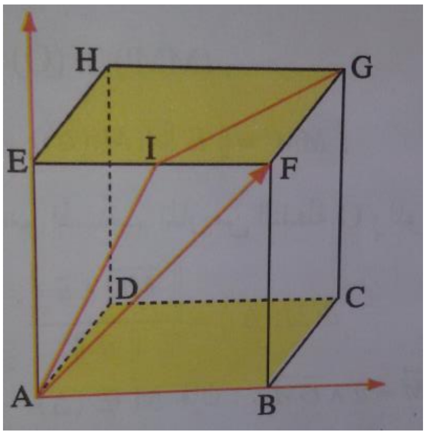
b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\overrightarrow{D\Omega}=\overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$

Solution : 1) a) dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)$



On a : $A(0;0;0)$ et $B(1;0;0)$ et $D(0;1;0)$ et $E(0;0;1)$ et $F(1;0;1)$

et $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$ et $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et

$K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

donc : $\overrightarrow{BK}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IG}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ et $\overrightarrow{IA}\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$

$\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{AB}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{AD}+\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&0\end{vmatrix}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ cad $\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$

b) $S_{IGA}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

2)a) on a : BD $\overrightarrow{D\Omega}=\overrightarrow{BT}$ donc $BT\Omega D$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{\Omega T}=\overrightarrow{DB}$

Donc $\Omega T=DB$

Soit M la projection orthogonal de A sur la droite (BD) donc (AM) c'est la hauteur des deux triangles ABD et $A\Omega T$ donc :

$S_{ABD}=\frac{1}{2}AM\times BD$ et $S_{A\Omega T}=\frac{1}{2}AM\times\Omega T$

Et puisque : $\Omega T=DB$ alors $S_{A\Omega T}=S_{ABD}$

2)b) Montrons que $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\left(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{T\Omega}\right)=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{T\Omega}$

On a : $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AT}=\vec{0}$ car les points A et C et T sont alignés

$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$ (car $\overrightarrow{T\Omega}=\overrightarrow{BD}$)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien